UNPAZ-Secundaria Materiales para la enseñanza

Orientados a profesores de 5º y 6º año de la Escuela Secundaria

Matemática

MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

PROGRAMA NEXOS

UNPAZ-Secundaria
Materiales para la enseñanza

UNPAZ-Secundaria Materiales para la enseñanza

Matemática

Orientados a profesores de 5º y 6º año de la Escuela Secundaria

Mariano Ojeda y
Belén Ponce de León
(coordinadores y
compiladores)

Rosana Talavera, Carolina
Pintos y Mariana Molina

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA

Ojeda, Mariano

UNPAZ-Secundaria : materiales para la enseñanza : Matemática / Mariano Ojeda ; Belén Ponce de León. - 1a ed . - José C. Paz : Edunpaz, 2019.

64 p. ; 21 x 15 cm.

ISBN 978-987-4110-30-5

1. Matemática. I. Ponce de León, Belén. II. Título.

CDD 510.712

1ª edición, mayo de 2019

ISBN: 978-987-4110-30-5

Jefa de Departamento Editorial: **Bárbara Poey Sowerby**
Corrección de estilo: **María Laura Romero y Nora Ricaud**
Diseño de colección: **Amalia González**
Arte y maquetación integral: **Jorge Otermin**

Secretaría de Políticas Universitarias. Programa Nexos: Articulación Educativa.
Subprograma Universidad – Escuela Secundaria. Ministerio de Educación de la Nación

Publicación electrónica. Distribución gratuita

Palabras del rector

Estimados/as docentes:

Con gran alegría, presentamos esta publicación, fruto del trabajo conjunto entre profesores/as de la UNPAZ y profesores/as de las escuelas secundarias de la zona. Las secuencias didácticas que ponemos hoy a disposición de toda la docencia, expresan el reconocimiento a la producción de saber que cotidianamente se realiza en las aulas tanto de la escuelas como en nuestra Universidad y que tiene como protagonistas a sus docentes.

Desde sus principios organizadores, la Universidad Nacional de José C. Paz situó la articulación entre la educación superior y la escuela secundaria como una línea de acción prioritaria en su política institucional. En línea con estos propósitos, se han abordado progresivamente instancias de trabajo que ponen el foco en la transición entre el nivel secundario y universitario. Entre estas se encuentra la generación de espacios de trabajo compartido entre profesores y profesoras de la universidad y de las escuelas secundarias de la región. En este caso la propuesta llevada adelante en el año 2018 incluyó la realización de encuentros entre docentes de ambos niveles, tanto presenciales como a través de un aula virtual, el desarrollo de instancias de debate, diseño de secuencias didácticas y, con una lógica de diseño/puesta a prueba, y aplicación de las propuestas colectivamente realizadas, la evaluación de sus efectos y, con los ajustes realizados, la redacción con fines de difusión.

Esta publicación tiene dos propósitos centrales: el primero, orientar la enseñanza de ciertos contenidos curriculares que, tanto en la secundaria como en la universidad se consideran relevantes; el segundo, generar nuevos ensayos de enseñanza que permitan señalar tanto los aspectos positivos de la propuesta como aquellos a mejorar. Entendemos la enseñanza como una práctica pública compartida, sujeta, por lo tanto, a controversia y argumentación. Así, los y las colegas encontrarán en esta publicación algunas páginas en blanco destinadas a las anotaciones docentes con la intención de que quien las utiliza se convierta también en autor/a agregando notas, pensando nuevas actividades, precisando intervenciones o documentando lo sucedido en cada actividad, de manera que ese material pueda seguir contribuyendo al saber colectivo y mejorando las secuencias.

Consideramos que la calidad de la enseñanza está vinculada a la posibilidad de intercambio y trabajo colectivo de los y las docentes, intercambio que no se produce en el vacío sino entrecruzado con los aportes teóricos que brindan las perspectivas pedagógicas, didácticas y disciplinares. En estos materiales apostamos a la reflexión y producción compartida como modo de formarse entre pares y generar materiales de apoyo a la enseñanza. Es también una decisión política la de fortalecer el posicionamiento de los y las docentes como productores de conocimiento a partir de la sistematización y documentación de sus saberes.

Esperamos que estas propuestas sean las primeras de una larga serie de trabajos publicados que expresen el compromiso de todos los actores en el mejoramiento de la enseñanza y de las oportunidades educativas de nuestros estudiantes. Agradecemos y felicitamos a todos/as los/las docentes que se comprometieron con el trabajo en los talleres y en la redacción de este material, sus aportes mejorarán la calidad de la propuesta académica tanto de sus escuelas como de la UNPAZ.

Federico G. Thea
Rector de la Universidad Nacional de José C. Paz

Índice

Introducción 13

Fundamentación 16

Funciones Exponenciales 17

Primera parte. Observando regularidades 19
Segunda parte. Estudio de las funciones 35
Autoevaluación 57

Bibliografía 61

Dedicatoria

A todos los alumnos de la escuela secundaria de nuestro país.

Agradecimientos

En esta producción queremos agradecer a todos los docentes de la región que se interesaron en participar y con mucho esfuerzo y dedicación han realizado aportes más que productivos y formativos para la construcción del conocimiento de nuestros alumnos de la escuela secundaria.

El agradecimiento también es extensivo al equipo de la Dirección General de Desarrollo Curricular, perteneciente a la Secretaria Académica de la Universidad Nacional de José C. Paz, gracias a la confianza y el apoyo permanente de este equipo hemos logrado este humilde producto.

Introducción

Este trabajo se encuadra en el marco del programa NEXOS, subprograma universidad–escuela secundaria, convocado por el Ministerio de Educación de la Nación. La convocatoria se fundamenta en los objetivos generales de la Secretaría Ejecutiva de los Consejos Regionales de Planificación de la Educación Superior (CPRES), con la finalidad de favorecer la vinculación del Sistema de Educación Superior con el resto de los niveles y modalidades educativas, en el desarrollo de políticas de promoción, apoyo y seguimiento de proyectos que aseguren la articulación intra- e interinstitucional, así como el tránsito de los estudiantes entre niveles educativos.

Es así que este dispositivo está pensado para mejorar y fortalecer la integración entre niveles, en nuestro caso entre el nivel secundario y el universitario, garantizando la disponibilidad de saberes de lectura y escritura de los estudiantes que finalizan sus estudios secundarios, asegurando la igualdad y la equidad en el ingreso, permanencia y egreso de la universidad.

Para el desarrollo de este proyecto, se convocó a docentes de la Región 9 (José C. Paz, Malvinas Argentinas, Moreno y San Miguel) con los cuales se realizaron varios encuentros.

En el primer encuentro se elaboró un diagnóstico compartido, para luego diseñar un plan de trabajo entre todos. Para el diagnóstico, primero hicimos un recorrido por los contenidos que los docentes encuentran dificultosos a la hora de enseñar-aprender en los últimos años de la escuela secundaria; luego se realizó una encuesta a docentes que trabajan en cursos de ingreso en universidades de la Región 9. Extrapolando estas dos visiones junto con los diseños curriculares de 5º y 6º año, acordamos los contenidos a trabajar en nuestro dispositivo. En la revisión de los Diseños Curriculares de la provincia de Buenos Aires, se puso el énfasis, no solo en los contenidos, sino también en el "cómo enseñamos". Esta última cuestión fue clave para el armado de la secuencia, es decir, la pensamos a partir de que los alumnos sean actores activos de la clase, verdaderos productores de conocimiento, apoyándonos en un enfoque de enseñanza constructivo, como es la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1970).

En el segundo y tercer encuentro, acordamos la división en grupos de trabajo según los diferentes contenidos. Luego se estableció que el armado de la secuencia lo íbamos a trabajar en una plataforma virtual, donde se subirían los avances, material teórico y, además, se realizarían intercambios en el foro acerca del armado del dispositivo.

Fundamentación

Consideramos que planificar una secuencia nos permite anticipar qué enseñar y cómo. Para ello pensamos en una colección de actividades que podrían funcionar para alumnos del nivel secundario de la región, anticipamos posibles soluciones y errores, para luego delinear posibles intervenciones. Organizamos las actividades de manera que los alumnos utilicen los conocimientos previos y construyan así uno nuevo; a medida que se avanza en la secuencia los alumnos y alumnas van accediendo a conocimientos nuevos. Entendemos que una actividad para constituirse en un problema, para ser resuelto por un alumno, debe promover el desarrollo de estrategias que favorecen una educación más autónoma, comprometida y participativa; se constituye como tal a partir del vínculo que el alumno establece con la tarea propuesta y no es una característica inherente a las actividades; es una situación que se le presenta al estudiante y lo moviliza a la acción.

En esta oportunidad realizamos un dispositivo para 5º año de escuelas secundarias; el contenido trabajado es "funciones exponenciales".

Funciones exponenciales

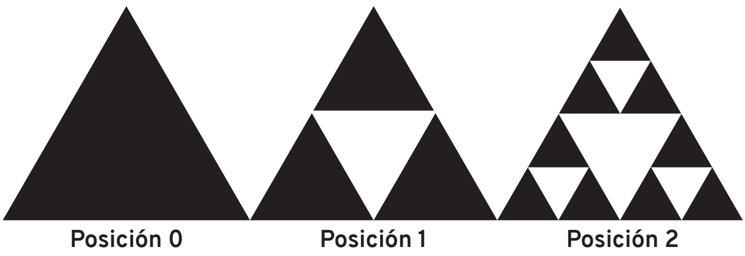
Primera parte.
Observando regularidades

En esta instancia se les presentará a los alumnos situaciones problemáticas, donde se espera que encuentren regularidades, analicen fórmulas de funciones exponenciales que representan la situación planteada y gráficos de la función exponencial.

Grafiquen funciones utilizando la app GeoGebra, analicen crecimientos, intersección con los ejes, dominio e imagen. Analicen las transformaciones de las funciones $f(x) = ka^x$ Construyan nociones de asíntota horizontal para funciones exponenciales.

Actividad 1. Observando regularidades

A continuación, se muestra una secuencia de triángulos. Cada triángulo está indicado con un número según el lugar que ocupa



¿Cuántos triángulos negros habrá en la posición 11? Justifica tu respuesta.

Sobre la actividad 1

En este primer problema se plantea una situación donde los estudiantes pueden explorar apelando a diferentes estrategias, por ejemplo, dibujar, hacer cuentas, hacer una tabla, usar la calculadora, etc. Cuando dibujen es probable que desistan de este camino, ya que el dibujo de la posición 11 será complicado, con lo cual intuimos que recurrirán a realizar algunas cuentas.

La idea es que detecten que existe una regularidad y que la misma no apela a una relación lineal de los triángulos negros en función de la posición que se quiera analizar.

Posibles estrategias

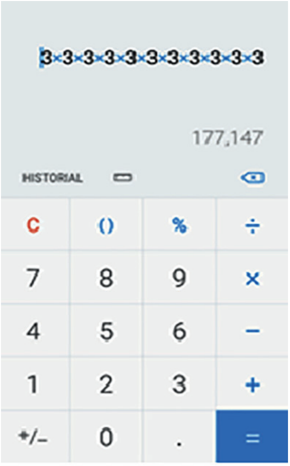
- Realizar una tabla

Posición	**Triángulo negro**
0	1
1	3
2	3.3 = 3^2 = 9
3	3.3.3 = 3^3 = 27

Posición	**0**	**1**	**2**	**3**
Triángulos	1	3	9	27

*3 *3 *3

Otra opción podría ser, recurrir al uso de la calculadora y realizar, por ejemplo, la cuenta que se muestra en la imagen. Como pueden verse más de 10 dígitos al mismo tiempo, este es un procedimiento que favorece la comprensión, ya que los alumnos pueden ver en la pantalla la cantidad de números 3 que se están multiplicando sucesivamente.



Apuntes del docente

Apuntes del docente

Actividad 2

En un laboratorio se está estudiando a un cierto microorganismo que tiene la propiedad de reproducirse dividiéndose en dos, según las condiciones del ambiente en el laboratorio. Los tiempos en los cuales se da esta reproducción son cada segundo. Un científico quiere establecer cuántos microorganismos irá teniendo a medida que transcurre el tiempo. Supongamos que inicialmente hay solo un microorganismo.

a) ¿Cuántos microorganismos contabilizará el científico luego de 5 segundos?

b) Se sabe que luego de un tiempo el científico tiene 2.048 microorganismos ¿cuánto tiempo transcurrió desde que inició el cultivo?

c) Puede haber 7.000 microorganismos en algún momento. ¿Cuándo?

d) Elegir cuál de las siguientes fórmulas describe mejor la situación, teniendo en cuenta que t representa el tiempo transcurrido y M la cantidad de microorganismos:

- $M=2t$
- $M=4t$
- $M=2^t$

Sobre la actividad 2

En los ítems a), b) y c) tenemos un trabajo de exploración, esta actividad se relaciona con la anterior en el sentido de que el/la estudiante puede apelar a conocimientos previos para resolverla.

Se pretende con el ítem d) que la/el estudiante tenga un primer acercamiento con la fórmula de la función exponencial, por lo que se les da opciones de fórmulas que modelizan la situación real y entre ellas tenemos modelos lineales que no corresponden a la situación. En la puesta en común se debería hacer hincapié en que el crecimiento de los microorganismos no es lineal.

Por lo tanto, si se le da valores al tiempo, como muestran las tablas 1 y 2 para las diferentes fórmulas, se podrá notar que el modelo matemático $2t$ no representa la situación, ya que los microorganismos se reproducen siguiendo otro patrón. Es importante aclarar que el incremento no es lineal y que el mismo se modeliza con la fórmula 2^t , estos dos tipos de crecimiento podrían ser comparados a su vez tomando, por ejemplo, para $M = 2t$, si $t = 0 \Rightarrow M = 0$, lo que sería absurdo, ya que al comienzo del estudio no habría microorganismo.

Tabla 1: valores que se obtienen del modelo $2t$

Tiempo (segundos)	Cantidad de microorganismos
0	2.0 = 0
1	2.1 = 2
2	2.2 = 4
3	2.3 = 6

Tabla 2: valores que se obtienen del modelo 2^t

Tiempo (segundos)	Cantidad de microorganismos
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

Apuntes del docente

Apuntes del docente

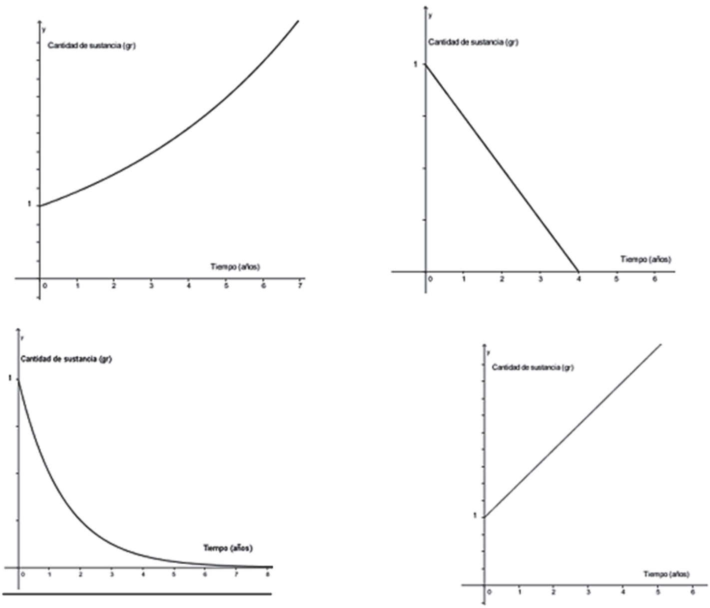
Actividad 3

Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias. La rapidez con que se desintegra una sustancia radiactiva se denomina *período de desintegración*, que es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa inicial.

Si tenemos una sustancia radiactiva con masa inicial de 1 gramo y el período de desintegración es de un año

a) Averiguar qué cantidad de sustancia habrá al cabo de 25 años.

b) Decidir cuál de los siguientes gráficos corresponde a la situación planteada. Justificar la elección.



c) ¿En algún momento habrá 0 gramos de sustancias radiactivas?

Sobre la actividad 3

En esta actividad tenemos que la rapidez con la que se desintegra una sustancia radiactiva es del tipo exponencial, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ en la que el valor de la base es menor que 1. Teniendo en cuenta que en el enunciado dice que se desintegra la mitad de la masa, con lo cual en la exploración por parte del alumno/a puede surgir que quieran dividir por dos el valor de sustancia que se obtuvo el año anterior, cabe aclarar que podríamos intervenir si no surge por parte de los estudiantes recordándoles que dividir por dos es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Para determinar cuál de los gráficos corresponde a la situación planteada, se debe tener en cuenta que anteriormente se trabajó haciendo hincapié en la no linealidad de los procesos que se vienen estudiando, con lo cual sería posible descartar los gráficos que describen la desintegración de la sustancia de manera lineal. Luego quedaría el análisis de los gráficos exponenciales, observando que uno de ellos es creciente y el otro decreciente. Se podría apelar a darle valores al tiempo y determinar si pertenecen a alguno de los gráficos, o bien podrían analizar que a medida que pasa el tiempo el valor de la sustancia es menor y que debido a esto el gráfico que corresponde es el que se muestra decreciente.

Armando una tabla de valores podemos notar que a medida que pasan los años la sustancia sigue decreciendo, podrían argumentar que no llega a cero, ya que al probar con valores "grandes" o "cada vez más grandes" se obtienen valores cercanos a cero. Con lo cual en el punto c) tendríamos un primer acercamiento a la noción de asíntota.

Año	Sustancia
25	2.9×10^{-8}
100	$2^1 = 2^{-31}$
300	$2^2 = 4^{-9}$

Hasta el momento hemos trabajado con situaciones problemáticas donde apelamos a procesos que varían de manera exponencial. Cabe aclarar que el dominio de estas funciones es acotado, ya que no podemos hablar de tiempo negativo; esto debe quedar claro, ya que a continuación se empezará a trabajar con funciones donde el dominio son los números reales.

Comentarios sobre las actividades llevadas al aula por la profesora Rosana en una escuela media de José C. Paz

En la resolución de la actividad 1, la mayoría de los alumnos hacían las siguientes cuentas en la calculadora: 3x3=9 ; 9x3=27 (posición 3); 27x3=81 (posición 4), y así hasta llegar a la posición 11, 59049x3=177.147 (posición 11). Sostenían que por cada triángulo negro en la próxima figura iba a haber 3 más. Una de las alumnas realizó la figura de la posición 3 y concluyó que en la posición 3^{11} había triángulos negros, por la justificación anterior.

Los errores que cometieron en la resolución es que sumaban 3 triángulos negros más por cada posición. Y decían que en la posición 3 había 12 triángulos negros y que en la posición 11 había 33 triángulos negros. Se intervino preguntando si ese criterio era válido para las tres posiciones iniciales, para que reconozcan el error.

En la puesta en común se mostró a los alumnos que todas las multiplicaciones que realizaban en la calculadora se podían escribir como una potencia.

Respecto a la resolución de la actividad 2, los alumnos utilizaron lo trabajado en la actividad 1 y respondieron utilizando las potencias de 2 y no las multiplicaciones como anteriormente. A la mayoría le costó llegar a la fórmula, no sabían cómo escribirla, se intervino recordando que al dato desconocido o general en matemática colocamos una letra, y todos pensaron en la "x", luego surgieron algunas fórmulas como: $2x$; x^2, las analizamos en el pizarrón con las respuestas de los ítems anteriores, para descartarlas; también se discutió qué representaba la letra "x", dejando en claro que es el tiempo, dado que algunos sostenían que representaba los microorganismos. Luego de descartar las fórmulas incorrectas, uno de los alumnos acotó que debería ser 2^x dado que en 5 segundos es 2^5 y 11 segundos 2^{11}, pero se tardó mucho tiempo en que surgiera por ellos mismos.

En la actividad 3 inicialmente el enunciado era el siguiente:

a) Averiguar qué cantidad de sustancia habrá al cabo de 1, 2 y 3 años.

b) Decidir cuál de los siguientes gráficos corresponde a la situación planteada. Justificar la elección.

c) Hallar la fórmula que representa la situación.

En el primer ítem algunos estudiantes respondían a priori, sin hacer cuentas, que en el tercer año la cantidad de sustancia iba a ser cero. Decían que en algún momento se iba a terminar la sustancia. Luego de realizar un debate entre todos, se recurre a la construcción de una tabla de valores en el pizarrón agregando más años y discutiendo si en algún momento obtenían el valor cero. Completando la tabla, concluían que no se desintegraba completamente, acotando que se agregaban cada vez más números después de la coma. Se escribieron los números decimales como fracción $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, etc., para que visualizaran que la división no es cero, sino un número muy cercano a él, en el infinito.

Se concluyó que el gráfico no toca ni atraviesa el eje. La fórmula se obtuvo en la puesta en común, dado que los alumnos no pudieron hallarla por sí mismos.

Para estos cambios propuestos sobre los enunciados de los ítems, se espera que la exploración por parte de los alumnos los lleve a pensar en qué pasa luego de 1, 2 y 3 años para luego pensar en responder qué pasará a los 25 años.

Con la gestión del docente en la puesta en común, podrán concluir que la relación que existe entre la posición del triángulo y la cantidad de triángulos negros no es lineal.

Apuntes del docente

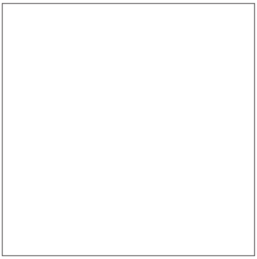
Apuntes del docente

Actividades complementarias

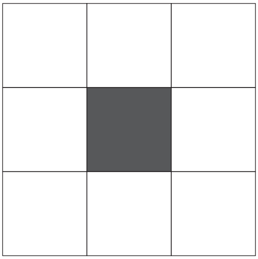
Actividad 4

Dada la secuencia de cuadros

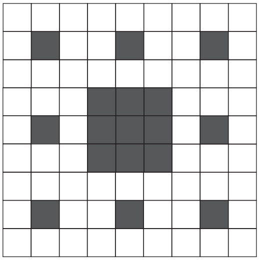
a) Decir cuántos cuadrados blancos habrá en el que ocupa la posición 8



Posición 0



Posición 1



Posición 2

b) Habrá una figura con 30.000 cuadrados blancos?

Actividad 5

En un laboratorio se estudia el comportamiento de una población de bacterias y se ha comprobado que, a temperatura ambiente, las bacterias se producen de manera muy acelerada y que se duplican cada 20 minutos. En cierto momento se cuentan 64 ejemplares. Respondan las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántas bacterias había dos horas antes de los 64 ejemplares? ¿Cuántas habrá dos horas después?
b) ¿Cuántas se sumarán durante la primera hora , a partir de los 64 ejemplares? ¿Y en la segunda hora? ¿Y en la tercera?
c) Encuentren una expresión que permita calcular, sabiendo el tiempo medido en minutos, qué cantidad de ejemplares (bacterias) se tendrán, o viceversa.
d) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya 22.768 ejemplares?

Segunda parte.
Estudio de las funciones

En esta parte se les presenta a los alumnos una serie de actividades donde se pretende que trabajen sobre los conceptos dominio, imagen, asíntotas y constante k, con la posible utilización del Software GeoGebra para argumentar sus respuestas, vinculen fórmulas con gráficos, estudien el corrimiento vertical de las funciones.

Actividad 6

Graficar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 3^x$ $\qquad f(\mathrm{x}) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\qquad f(x) = 2^x$ $\qquad f(\mathrm{x}) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

a) ¿Qué ocurre con *f(x)* a medida que x toma valores cada vez más grandes? ¿y cada vez más chicos?

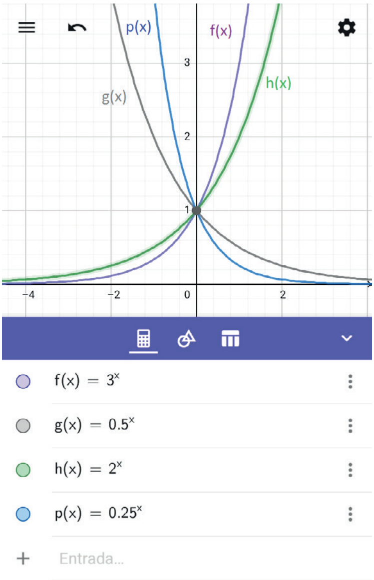
b) ¿Las funciones intersecan los ejes x e y? ¿en qué punto?

c) Indicar el conjunto de Dominio e Imagen de las funciones

Sobre la actividad 6

Podrían apelar al uso del software GeoGebra, teniendo en cuenta que es un recurso que puede facilitar la exploración para valores de “x” muy grandes y muy chicos. Una vez graficadas dichas funciones se podrán decir de 3^x, que a medida que “x” es cada vez más chica la función tiende a cero y cuando “x” toma valores cada vez más grandes la función tiende a infinito, lo mismo sucede con 2^x. En cambio, las funciones $0,5^x$ y $0,25^x$, tienen otro comportamiento, a medida que "x" es cada vez más chica tienden a infinito y cuando "x" toma valores cada vez más grandes, tienden a cero. Para poder extraer de este análisis una conclusión que nos acerque a la definición de función exponencial, se podrá pedir al estudiante que explore qué pasa si se le da diferentes valores a la base, si se comportan como las funciones analizadas anteriormente, con lo cual se estaría en condiciones de caracterizar a la familia de funciones estudiadas hasta el momento, las mismas se dividen en dos grupos, si la base es menor a 1 las funciones son decrecientes y si es mayor que 1 las funciones son crecientes.

La familia de funciones que se graficó son positivas y tienen como asíntota al cero, las mismas nunca cortan al eje "x", todas cortan al eje "y" en el valor 1. El dominio de las mismas abarca el conjunto de los números reales y la imagen: $(0, +\infty)$



Puesta en común: se mostrarán las diferentes resoluciones y dificultades que hayan surgido en la resolución.

Una vez terminado el debate sobre el problema, el docente podrá proceder a la generalización del contenido, mediante el uso de la notación correspondiente.

Llamamos Función Exponencial a una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ que verifica:

$$f(x)=a^x.a>0,a\neq 1$$

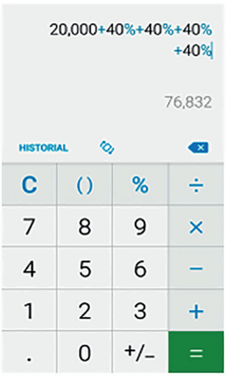
Apuntes del docente

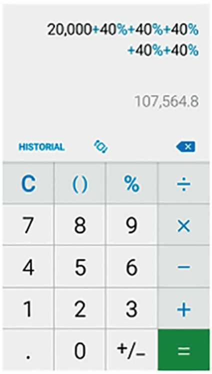
Apuntes del docente

Actividad 7

Los técnicos predicen que una mancha de sustancia tóxica que tiene actualmente 20.000m^2 de superficie crecerá aproximadamente un 40% diario. Estiman que al llegar a los 100.000m^2 puede ocasionar serios daños en el medio ambiente. ¿Con cuánto tiempo cuentan, aproximadamente, para evitar dicha dificultad? ¿Es posible encontrar una fórmula que represente la situación?

En el problema planteado los estudiantes podrán apelar al uso de la calculadora para averiguar el tiempo con el que cuentan para no ocasionar daños en el ambiente, ya que es un cálculo sencillo; podrían encontrar la dificultad de que al sumar el 40% diario, el quinto día da como resultado 107.564,8 m^2 de sustancia tóxica, en cambio el cuarto día se obtiene 76.832m^2, con lo cual podrán justificar de manera aproximada que antes del quinto día se debe solucionar el problema. Ahora bien, si quisiéramos saber con exactitud el momento en que se llega a los 100.000m^2, deberíamos apelar a encontrar una fórmula matemática que represente la situación. Hasta el momento los estudiantes conocen la función exponencial a^x, podrían pensar que al multiplicar un número varias veces se obtenga la respuesta. Ahora bien, ¿Cuál es ese número? sabiendo que para calcular el 40% de 20.000 se multiplica por la razón $\frac{40}{100}$, el valor que se necesita para calcular la superficie a medida que pasan los días haríamos el cálculo, por ejemplo, $20.000+20.000 \times \frac{40}{100}$, estaríamos sumándole al 100% de superficie un 40% más, con lo cual podríamos transformar la operación matemática de la suma en una multiplicación, donde la razón por la que debemos multiplicar sería $\frac{140}{100}$. A continuación, mostramos un ejemplo en el uso de la calculadora.





Apuntes del docente

Actividad 8

Una laguna contiene sedimentos uniformemente distribuidos que reducen la transmisión de la luz a través del agua. Dicha luminosidad se reduce a un 20% cada vez que se avanza un metro hacia la profundidad de la laguna.

Un buzo está pronto a sumergirse en dicha laguna, si consideramos la intensidad de la luz (medida en unidades lumínicas), como de 100 unidades en la superficie

a) Realizar una tabla que indique la luminosidad para cada uno de los primeros 10 metros.

b) ¿Se podrá decir qué intensidad de luz tendrá el buzo al bajar 10,5 metros?

c) Nuestro buzo tiene un instrumento de medición que puede detectar luz hasta una intensidad de 0,2 unidades lumínicas. ¿Podrá detectar luz si baja a 20 metros?

d) ¿Hasta qué profundidad podrá descender con su instrumental y aún detectar cierta luminosidad?

e) Es posible encontrar una fórmula que represente la situación y graficar.

Posible cálculo lineal (erróneo) del ítem a)

Luego de realizar una tabla en el ítem a), obtendrán que a los 10 metros la luminosidad es de 10,73741824…, ya que:

100-20%-20%-20%-20%-20%-20%-20%-20%-20%-20% = 10,73741824…,

Luego en el ítem b) quizás puedan suponer que, como el buzo bajó $\frac{1}{2}$ metro más, la luminosidad se redujo 10% más, que sería la mitad del porcentaje que se reduce por metro. Dando como resultado 9,663676416, lo cual sería erróneo.

Podemos dejar que resuelvan libremente este ítem, y en el ítem d) donde tienen que hallar la fórmula, se les podrá pedir que calculen la luminosidad a los 10,5 metros con la misma y contrastar las dos resoluciones, pidiéndoles que justifiquen por qué las dos dan resultados cercanos pero distintos, ¿las dos están bien?¿alguna no corresponde a la situación? Con la fórmula se obtiene: $100.\left(\frac{8}{10}\right)^{10,5}=9,603838835$, se puede mostrar así la importancia de modelizar la situación mediante una fórmula, para llegar al cálculo exacto de luminosidad.

Para el ítem b), si no se tiene la fórmula, se podrá responder de manera aproximada que alcanza las 0,2 unidades lumínicas entre los 17 y 18 metros.

$$100-\underbrace{20\%-20\%-20\%...-20\%}_{\text{17 metros}}=2{,}2517998137...$$

$$100-\underbrace{20\%-20\%-20\%...-20\%}_{\text{18 metros}}=1{,}8014398509...$$

Noción de constante

En esta actividad y en la anterior tenemos el surgimiento de un valor que multiplica a la exponencial, se espera que el docente en la puesta en común pueda hacer ciertas preguntas que guíen al alumno/a para que lo note, por ejemplo:

¿Se podría considerar que alguna de estas dos fórmulas halladas son funciones exponenciales? Justifica tu respuesta.

¿Las fórmulas halladas corresponden a funciones exponenciales? Justifica tu respuesta

Apuntes del docente

Apuntes del docente

Actividad 9

¿Qué modificarías en la fórmula de la actividad 8 para que:

a) sea creciente

b) la nueva función tenga una gráfica que sea simétrica a la gráfica original con respecto al eje y

c) su conjunto imagen sea (- ∞ , 0)?

d) Si crees que hay distintos tipos de transformaciones sobre la función $f(x)$ para lograr en cada caso, explica cuáles son.

En esta actividad los/as alumnos/as podrán utilizar el Software GeoGebra para resolverla, ya que la resolución se llevará a cabo de una manera más dinámica, de no contar con el mismo podrán apelar a los conocimientos teóricos que poseen hasta el momento para poder arribar a nuevas conclusiones.

Posible resolución con GeoGebra

Fórmula, $$L = 100.\left(\frac{8}{10}\right)^{m}$$

Si ingresan la fórmula en el software, lo primero que se puede notar es que el valor de la ordenada al origen coincide con el valor de la constante. Podrán cambiar el mismo para observar qué sucede, si probamos con distintos valores (gráfico 1), en este caso en particular ocurre que cuando la constante es positiva el gráfico de la función es decreciente y con imagen positiva, en cambio cuando la constante es negativa el gráfico de la función es creciente y con imagen negativa.

Como muestra el gráfico 2, cuando el valor de la constante es el opuesto al de la original, la función se transforma en creciente, además los valores de la función original son los mismos cambiados de signo (f(x)=-L, gráfico 2)

Gráfico 1

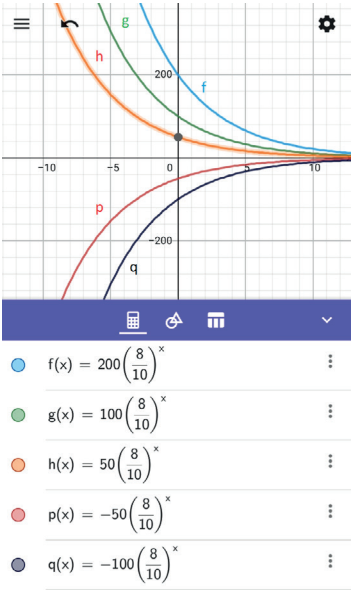
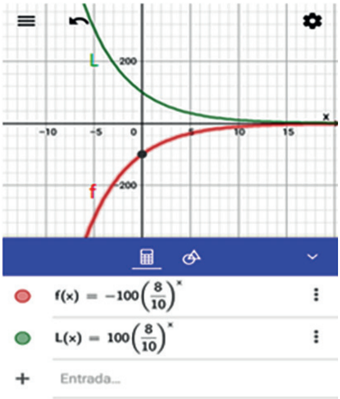


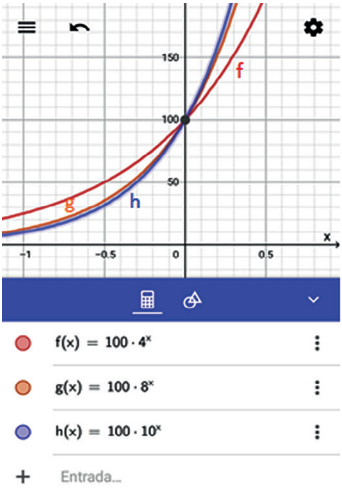
Gráfico 2



Ahora bien, una posible pregunta para los alumnos/a sería ¿Es lo único que podemos modificar para que la función sea creciente?

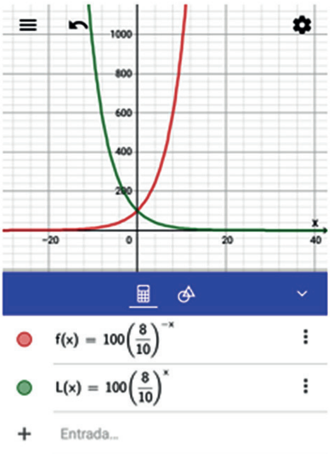
Puede ocurrir que quieran modificar el valor de la base, eligiendo uno negativo y se encuentren con que GeoGebra no les arroje ningún gráfico, con lo cual podríamos pedir que construyan una tabla de valores, en la misma observarán que se obtienen puntos aislados y además si el exponente toma valores racionales irreducibles de denominador par, el resultado no pertenece a los reales, con lo cual no tendría las características de la familia de funciones exponenciales que venimos estudiando. Se podrá establecer que el valor de la base tiene que ser mayor que cero y distinto de uno.

Modificando la base con valores mayores que 1, se observarán gráficas crecientes



Para hallar una gráfica que sea simétrica a la planteada, será necesario que los alumnos/as, apelen a la definición del simétrico de un punto.

Se observa que el simétrico de un punto, perteneciente a la gráfica respecto del eje, y conserva el mismo valor de la imagen que el original, con lo cual los valores de x que son positivos se transformarán en negativos y viceversa, dicha relación la podemos notar de la siguiente forma: f(x)=L(-x)



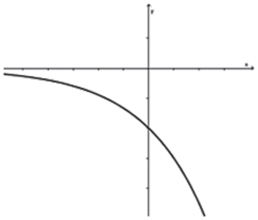
Para que el conjunto imagen sea (- ∞ , 0), podemos utilizar lo analizado hasta el momento y concluir que la función debería ser creciente y simétrica respecto del eje x; para que esto suceda vimos que la nueva función debía tener como constante el valor opuesto de la original.

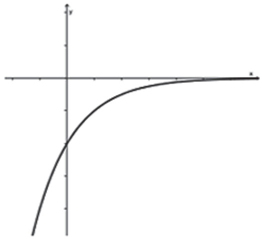
Apuntes del docente

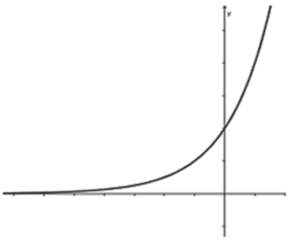
Actividad 10

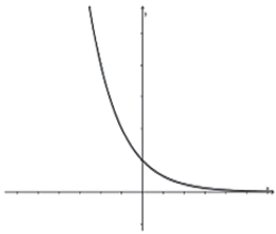
Los siguientes gráficos corresponden a funciones exponenciales del estilo $f(x)=k.a^x$. Indicar cuáles de ellos cumplen con las condiciones detalladas de a y k en cada caso.

Condiciones:	**Gráfico**
$0 < a < 1$ y $k<0$	__________
$0 < a < 1$ y $k>0$	__________
$a > 1$ y $k>0$	__________
$a > 1$ y $k<0$	__________









Posible pregunta para los/as alumnos/as podría ser ¿pueden concluir algo respecto de las condiciones de a y k?

Para concluir que:

La función exponencial del tipo a^x es positiva para todo valor de x perteneciente a los Reales,

Si k>0: la función es positiva, $k.a^x$ es positiva $\Rightarrow$ si $a> 1$, la función es creciente.

$\Rightarrow$ si $0<a< 1$, la función es decreciente.

Si k>0: la función es negativa, $k.a^x$ es negativa $\Rightarrow$ si $a> 1$, la función es decreciente.

$\Rightarrow$ si $0<a< 1$, la función es creciente.

Luego de estas actividades se espera que el docente inicie una etapa de formalización de los contenidos trabajados.

Apuntes del docente

Apuntes del docente

Actividad 11

Para los siguientes grupos de funciones

a) Realizar un gráfico aproximado de los distintos grupos de funciones f, g y h.

b) Hallar Imagen, asíntota horizontal y ordenada al origen.

c) ¿Existe alguna relación entre los distintos grupos de funciones f, g y h? Justifica tu respuesta.

$f(x)=4^x$	$f(x)=0,5^x$	$f(x)=-2.3^x+2$
$g(x)=4^x+3$	$g(x)=0,5^x-5$	$g(x)=-2.3^x-2$
$h(x)=4^x-4$	$h(x)=0,5^x+1,5$	$h(x)=-2.3^x$

Sobre la actividad 11

Para esta actividad se espera que los alumnos puedan abordar la resolución utilizando diferentes estrategias, puntualmente para ítem c) podrían realizar una tabla, usar la aplicación GGB, utilizar algunos datos como ser, imagen, puntos, asíntotas, etc.

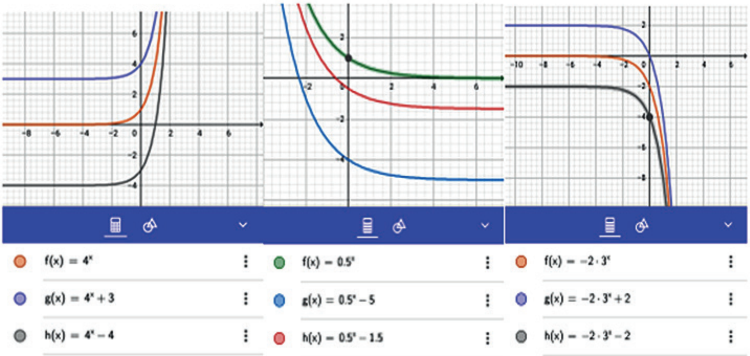
Posible resolución

Para justificar la relación que existe entre el grupo de funciones, posiblemente digan que todas las fórmulas comparten el mismo término 4^x, que la diferencia es que en g(x) se tiene un término constante +3, a diferencia que en h(x) el término constante el - 4. Ahora bien, podríamos preguntar ¿Qué sucede con la gráfica? ¿Cómo influye esto que están notando? ¿Cómo se relacionan las imágenes? ¿Qué sucede con las asíntotas? ¿Cómo se relacionan?

Podrán argumentar que la asíntota coincide con el número correspondiente al término constante de la función. Además, el conjunto imagen de cada una también comienza en dicho número y todas las funciones son crecientes. Las ordenadas al origen tienen la misma distancia entre ellas, al igual que las asíntotas entre sí, con lo cual podrían argumentar que toda la función está corrida verticalmente hacia abajo o arriba, en una misma distancia entre una función y otra. Pero esto no bastaría, habría que ver si para todo punto sucede esto. Sabiendo que para una cierta cantidad finita de puntos sucede bastaría, ya que en este curso no corresponde tal demostración, pero sí los puede ayudar a tener un análisis más amplio de cómo se comportan dichas funciones, quizás mediante el armado de una tabla se pueda hacer la comparación, como se muestra a continuación.

x	4^x	$4^x + 3$	$4^x - 4$
0	1	1 + 3 = 4	1 - 4 = -3
1	4	4 + 3 = 7	4 - 4 = 0
2	16	16 + 3 = 19	
-2	$\frac{1}{16} = 0,0625$	$\frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16} = 3,062$	$\frac{1}{16} - 4 = \frac{-63}{16} = -3$

Como se muestra a continuación, cuando grafiquen podrán notar que todas las funciones del mismo grupo son crecientes o bien decrecientes.



Posible formalización:

- Para la función exponencial $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = k.a^x + c$.
  Si c>0: La gráfica de *f* sube *c* unidades.
  Si c<0: La gráfica de *f* baja *c* unidades.

Apuntes del docente

Apuntes del docente

Autoevaluación

Actividad 1

En un laboratorio se estudian tres tipos de bacterias. A continuación, se dan algunos datos obtenidos de la evolución de una bacteria de cada clase. Supongamos que los tres cultivos tienen la misma cantidad de bacterias en el instante inicial.

Cultivo 1: Las bacterias se reproducen cuadriplicándose segundo a segundo.

Cultivo 2: Las bacterias se reproducen subdividiéndose de una cierta manera y se sabe que a los 4 segundos hay 625 bacterias.

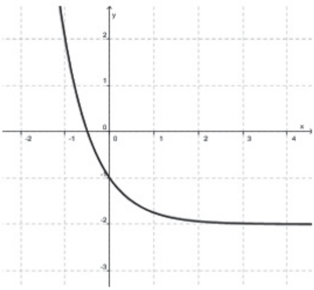
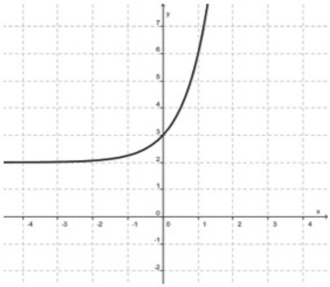
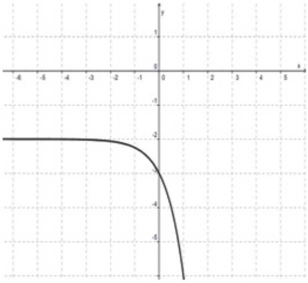
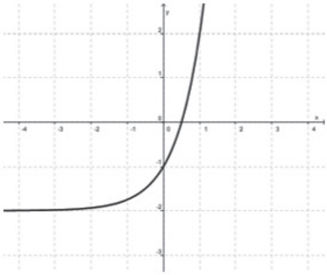
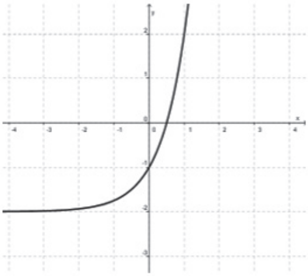
Cultivo 3: Las bacterias se reproducen de manera tal que la cantidad en cada segundo representa un 300% de la que había un segundo antes.

Encontrar una fórmula para calcular cuántas bacterias hay segundo a segundo.

Decidir cuál de los tres cultivos aumenta de manera más rápida.

Actividad 2

¿Cuál es el gráfico que corresponde a $f(x) = 4^x - 2$?

Actividad 3

Teniendo en cuenta la función $f:\Re \rightarrow \Re \,/\, f(x) = 3^{x} - 3$

a) ¿Cuál es su dominio?
- ❑ Todos los reales.
- ❑ [0; + ∞)
- ❑ [-3; 1]

b) ¿Cuál es su imagen?
- ❑ Todos los reales.
- ❑ [-3; + ∞)
- ❑ [1; 3]

c) ¿Cuál es su asíntota horizontal?
- ❑ y = 1
- ❑ y = -1
- ❑ y = -3

d) ¿Cuál es su raíz?
- ❑ x = 2
- ❑ x = -2
- ❑ x = -33

e) ¿Cuál es la ordenada al origen?
- ❑ y = 3
- ❑ y = 0
- ❑ y = -3

Apuntes del docente

Bibliografía

Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comps.), *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 155-177). Los Polvorines: UNGS-EDUVIM.

----- (2017). Consignas para la clase de matemática. En M. Rodríguez (coord.), *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (pp. 25-47). Los Polvorines: UNGS.

Itzcovich, H. y Novembre, A. (2006). *Matemática 3-Polimodal, Educación secundaria superior* (pp. 6-25). Buenos Aires: Tinta Fresca.

Bracchi, C. y Paulosso, M. (2011). *Diseño Curricular para Educación Secundaria 5to año, Matemática-Ciclo Superior*. La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA

MA

Este cuadernillo forma parte de una colección denominada “UNPAZ-Secundaria: Materiales para la enseñanza” y fue realizado en colaboración con los profesores de la región.
Responde a la necesidad de un trabajo en conjunto entre la Universidad Nacional de José C. Paz y las Escuelas Secundarias de la región, proponiéndose como una guía orientativa para trabajar en las clases o para repensar las propias prácticas.
La intención de estas producciones es la de favorecer la disponibilidad de los saberes con los que finalizan los estudiantes sus estudios secundarios, con el propósito de asegurar la igualdad en el ingreso y permanencia en la universidad.

ISBN 978-987-4110-30-5

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

UNPAZ
Universidad Nacional de José C. Paz